



KLUB MŁODEGO  
ODKRYWCY

## Zajęcia w KMO 15.06.2022

### Temat: Podróż przez różne powierzchnie – Wstęga Möbiusa.

„Jedna geometria nie może być prawdziwsza od drugiej; może być jedynie wygodniejsza”.

Henri Poincare

Geometria Euklidesowa na płaszczyźnie, znana nam ze szkoły, gdy używamy linijki, cyrkla i płaskich kartek z zeszytu.



Geometria sferyczna: używana np. przez pilotów, którzy nawigują samolotami.

Geometria hiperboliczna: powierzchnia hiperboliczna cechuje się maksymalną powierzchnią przy minimalnej objętości, dlatego można ją dostrzec w świecie przyrody np. kiedy organizm potrzebuje dużej powierzchni na pochłanianie pożywienia, to rośnie w „sposób hiperboliczny”. Przykładem takich organizmów są koralowce.



---

## Wstęga Möbiusa



- Powierzchnia odkryta niezależnie przez niemieckich matematyków Augusta Möbiusa i Johanna Benedicta Listinga w 1858



August Ferdinand Möbius  
(1790-1868)



Johann Benedict Listing  
(1808-1882)

- **Wstęga Möbiusa** to prostokątny pasek papieru ze sklejonymi węższymi końcami, ale przed sklejeniem jeden z tych końców trzeba odwrócić o  $180^\circ$ .

Otrzymana w ten sposób powierzchnia ma ciekawe własności (wyniki naszych doświadczeń):

- jest to powierzchnia jednostronna.
- każde dwa punktu na tej powierzchni da się połączyć linią nie wychodząc poza krawędź.
- ma tylko jeden brzeg.

- brak orientacji: idąc po dotarciu do „początku” otrzymamy odbicie lustrzane.
- rozcięcie wstęgi Möbiusa wzdłuż jej linii środkowej nie powoduje jej rozkładu na dwa rozłączne obiekty, lecz powoduje otrzymanie dwukrotnie dłuższej, dwukrotnie skręconej obręczy (posiadającej dwie strony).
- rozcięcie wstęgi Möbiusa wzdłuż w jednej trzeciej szerokości powoduje otrzymanie jednej węższej wstęgi Möbiusa o długości równej wyjściowej wstędze oraz splecionej z nią dwukrotnie dłuższej, dwukrotnie skręconej obręczy.

• **Przykładowe zastosowania i dzieła gdzie można spotkać Wstęgę Möbiusa:**

<p>stylizowana wstęga Möbiusa jest symbolem recyklingu, czyli procesu transformacji zużytych odpadów w gotowe do ponownego użytku materiały, którymi wcześniej były (następuje powrót do punktu wyjścia, jak na wstędze Möbiusa).</p>	
<p>w sztuce znana jest z grafiki Mauritsa Cornelisa Eschera przedstawiającej mrówkę idące po wstędze Möbiusa. Analizując wędrówkę mrówek widać, że wstęga ma tylko jedną stronę.</p>	
<p>cyrkowcy wykonują "magiczną" sztuczkę, w której cylindryczna obręcz ma ścieżkę z prochu umieszczoną w połowie szerokości i po podłożeniu ognia efektownie przepala się na dwie części, a gdy ogień dochodzi już do końca (tzn. w tym przypadku do początku), wbrew oczekiwaniom widzów wstęga nie rozpada się na dwie części, ale nadal stanowi jedną całość. (obręcz nie jest cylindrem lecz wstęgą Möbiusa)</p>	
<p>w technice używa się pasów transmisyjnych skręconych w kształt wstęgi Möbiusa, co powoduje, że ich powierzchnia zużywa się jednakowo po obu stronach</p>	
<p>logo firmy Renault autorstwa Victora Vasarely'ego, logo niemieckiego Commerzbanku i innych firm, np. Global Investment Servicing, Carmike Cinemas i amerykańskiej firmy administrującej ubezpieczeniami zdrowotnymi HMS Holdings Corporation.</p>	

**dr Justyna Makowska**

Centrum Kreatywnego Uczenia się Matematyki Uniwersytet w Białymstoku  
Wydział Matematyki, ul. Ciołkowskiego 1M, 15-245 Białystok

<https://math.uwb.edu.pl/pl/ckum/>

[ckum@math.uwb.edu.pl](mailto:ckum@math.uwb.edu.pl)