Propozycje zajęć z zakresu matematyki (ew. w korelacji z innymi dziedzinami) w Centrum Kreatywnego Uczenia się Matematyki na Wydziale Matematyki Uniwersytetu w Białymstoku

Szanowni Państwo, nauczyciele matematyki i wszyscy, którym na sercu leży efektywne kształcenie matematyczne dzieci i młodzieży!

W ostatnich tygodniach zakupiliśmy do naszego Centrum nowe pomoce dydaktyczne, utworzyliśmy w budynku naszego wydziału ekspozycję tych pomocy i na ich bazie (chociaż nie tylko) pojawiły się pomysły na nowe zajęcia dla uczniów w naszym Centrum. Poniżej przedstawiona jest lista i krótkie omówienie tych propozycji. Część tych zajęć z uwagi na swój charakter może odbyć się tylko w warunkach stacjonarnych, a więc będziemy musieli poczekać z ich realizacją do czasu, gdy obostrzenia zostaną cofnięte i będziemy mogli zaprosić Państwa z uczniami do naszego Centrum. Dotyczy to wszystkich zajęć, podczas których wykonywane są eksperymenty, nawet jeśli to wykład interaktywny. Część zajęć (np. Propozycja 12., Propozycja 13., Propozycja 15.) można prowadzić w formie online, więc po powrocie z ferii można będzie składać zapotrzebowanie na takie zajęcia (mailowo na adres a.rybak@uwb.edu.pl lub ckum@math.uwb.edu.pl).
Propozycje 8., 9. i 11., a także częściowo 5. i 10. zostały opracowane dzięki współpracy z Panem Istvánem Lénártem z ELTE University w Budapeszcie, który jest znanym specjalistą od geometrii nieeuklidesowych i któremu niniejszym składam serdeczne podziękowanie za wszelkie inspiracje.

Proszę Państwa, zapraszamy do współpracy. Dzielmy się pięknem matematyki z naszymi uczniami, może wtedy ją pokochają.

W imieniu całego zespołu Centrum Kreatywnego Uczenia się Matematyki

dr Anna Rybak

Propozycja 1. Matematyka a żywioły - bryły platońskie jako symbole żywiołów

Odbiorcy: uczniowie starszych klas szkół podstawowych i uczniowie szkół średnich;

Forma zajęć: warsztaty;

Wprowadzenie:

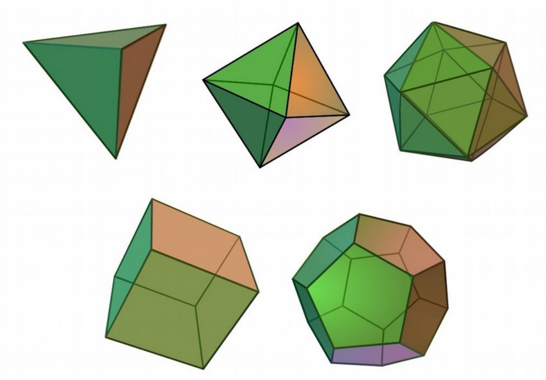
- Co to są żywioły?
- Żywioły przeciwstawne: ogień i woda, ziemia i powietrze;
- Związek żywiołów z kolorami;

- Związek żywiołów z temperamentem człowieka;
- Związek żywiołów z matematyką – żywioły a bryły.

Istnieje tylko pięć wielościanów foremnych zwanych bryłami platońskimi. Reprezentują granice możliwości tworzenia się materii poprzez ich wzajemne relacje. Platon, jeden z największych greckich filozofów, przypisał im cztery żywioły, z jakich według starożytnych miał być zbudowany świat.
Z ogniem skojarzył czworościan (Tetraedr), z ziemią — sześcian, z powietrzem — ośmiościan (Oktaedr), a z wodą — dwudziestościan (Ikozaedr). Natomiast piąty żywioł jako aspekt duchowy reprezentuje Dodekaedr - dwunastościan. Przypisany jest mu eter, energia kosmiczna lub też wszechświat.
Całe życie składa się z tych geometrycznych struktur: nasze fizyczne ciała, komórki, DNA, pierwiastki, rośliny, zwierzęta, minerały, planety, systemy słoneczne, gwiazdy, galaktyki, mikrokosmos i makrokosmos - są bezustannie powtarzającymi się archetypowymi wzorcami.

Aktywności uczniów podczas zajęć:

- budowanie modeli brył platońskich;
- próba odpowiedzi na pytanie: Dlaczego danym żywiołom przyporządkowano dane bryły?
- opracowanie spójnego obrazu świata jako połączenia żywiołów – według własnej inwencji i wyobraźni.



Na powyższym obrazku pokazane są bryły platońskie, a uczestnikom warsztatów w budowaniu modeli pomogą magnetyczne klocki i inne materiały z naszego zbioru pomocy dydaktycznych:

Propozycja 2. Lekcje z rachunku prawdopodobieństwa z wykorzystaniem pakietu pomocy dydaktycznych

Odbiorcy: uczniowie starszych klas szkół podstawowych i uczniowie szkół średnich;

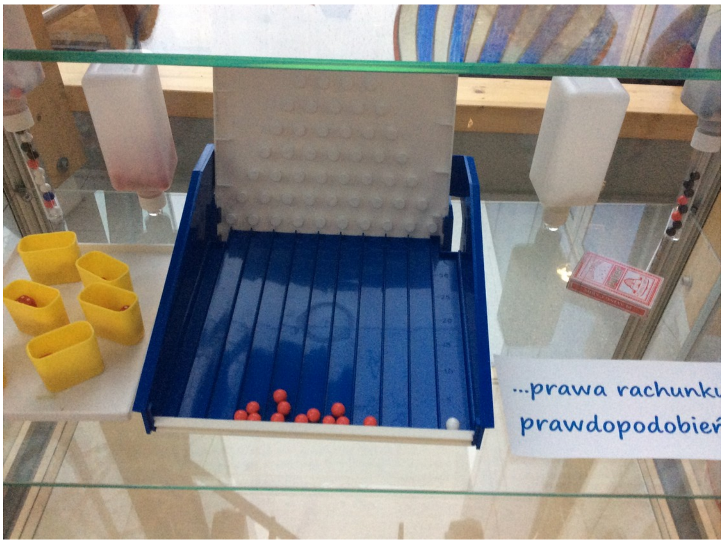
Forma zajęć: warsztaty;

Wprowadzenie

Pakiety do rachunku prawdopodobieństwa, które znajdują się na wyposażeniu CKUM zawierają następujące elementy:

- Deska Galtona umożliwiająca wizualizację schematu Bernoulliego, demonstrację powstawania w codziennym życiu rozkładu normalnego pod wpływem drobnych losowych odchyleń, prezentowanie rozkładu dwumianowego i trójkąta Pascala (to z opisu pakietu, natomiast moja propozycja dotyczy odkrywania przez uczniów wspomnianych praw w oparciu o samodzielnie wykonywane doświadczenia);

- kostki, karty do wykonywania doświadczeń losowych, uzupełnienie wykorzystaniem programu VUstat, gdy trzeba wykonać wiele doświadczeń, aby zaobserwować regularności;



Proponujemy realizację następujących zagadnień dotyczących rachunku prawdopodobieństwa z wykorzystaniem elementów pakietu:

W szkole podstawowej:

- kształtowanie pojęcia prawdopodobieństwa zdarzenia;
- obliczanie prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach losowych, polegających na rzucie monetą, rzucie sześcienną kostką do gry, rzucie kostką wielościenną lub losowaniu kuli spośród zestawu kul.
- obliczanie prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach, polegających na rzucie dwiema kostkami lub losowaniu dwóch elementów ze zwracaniem lub bez zwracania;

W szkole średniej:

- kształtowanie pojęcia prawdopodobieństwa zdarzenia;
- obliczanie prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach losowych;
- stosowanie schematu Bernoulliego.

Ponadto proponujemy zajęcia dotyczące kombinatoryki, obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń przy pomocy drzew, prawdopodobieństwa warunkowego oraz rozwiązywania zadań z urnami z wykorzystaniem interaktywnego programu komputerowego VUstat holenderskiej firmy VuSoft (www.vusoft.eu). Celem wykorzystania tego programu nie będzie ułatwienie uczniom wykonania obliczeń, ale zainspirowanie ich do odkrywania praw rachunku prawdopodobieństwa i ułatwienie zrozumienia tych praw.

Aktywności uczniów:

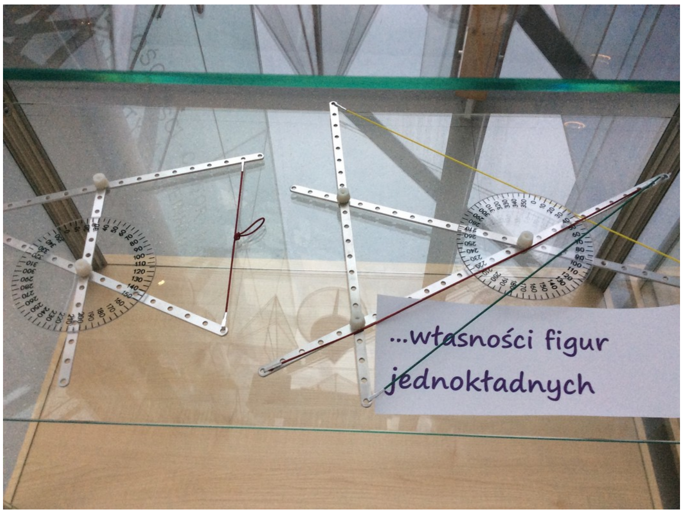
- wykonywanie doświadczeń losowych właściwych dla tematu zajęć;
- wnioskowanie.

Propozycja 3. Lekcje z przyrządem do ilustracji figur jednokładnych i podobnych

Odbiorcy: uczniowie starszych klas szkół podstawowych i uczniowie szkół średnich;

Forma zajęć: warsztaty;

Wprowadzenie



Przy pomocy widocznych na zdjęciu elementów można budować różne wielokąty i ilustrować wiele zagadnień z zakresu geometrii oraz trygonometrii na różnych poziomach edukacji. Sprzyja to dokonywaniu przez uczniów odkryć dotyczących zależności pomiędzy obiektami geometrycznymi.

Proponujemy realizację następujących zagadnień dotyczących geometrii z wykorzystaniem elementów pakietu:

W szkole podstawowej:

- budowanie różnych wielokątów według zadanych warunków;

- własności trójkątów, czworokątów i ewentualnie innych wielokątów w zależności od inwencji uczniów;
- nierówność trójkąta;
- twierdzenie Pitagorasa – inspiracja do jego sformułowania.

W szkole średniej:

- własności trójkątów, czworokątów i ewentualnie innych wielokątów w zależności od inwencji uczniów;
- własności jednokładności;
- twierdzenie Talesa;
- przebieg zmienności funkcji sin$x$ i cos$x$ w przedziale (0°; 90°).

Aktywności uczniów:

- wykonywanie konstrukcji właściwych dla tematu zajęć;
- wnioskowanie.

Propozycja 4. Lekcje z geoplanem

Odbiorcy: uczniowie szkół podstawowych;

Zakres tematyki i aktywności uczniów:

- budowanie różnych wielokątów według zadanych warunków;
- badanie własności trójkątów, czworokątów i ewentualnie innych wielokątów w zależności od inwencji uczniów.

Propozycja 5. Sudoku na płaszczyźnie, kostce i sferze

Odbiorcy: uczniowie starszych klas szkół podstawowych i uczniowie szkół średnich;

Forma zajęć: warsztaty;

Wprowadzenie

Sudoku to łamigłówka, której celem jest wypełnienie diagramu 9 × 9 w taki sposób, aby w każdym wierszu, w każdej kolumnie i w każdym z dziewięciu pogrubionych kwadratów 3 × 3 (zwanych „blokami” lub „podkwadratami”) znalazło się po jednej cyfrze od 1 do 9.

Przykładowa plansza do sudoku może wyglądać następująco:

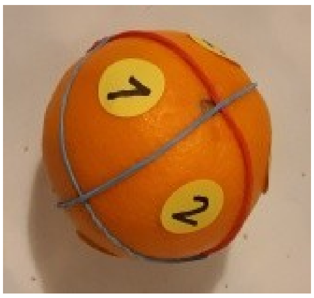
2			6		7	5		
							9	6
6		7			1	3		
	5		7	3	2			
	7						2	
			1	8	9		7	
		3	5			6		4
8	4							
		5	2		6			8

Sudoku można traktować jak zadanie podobne do krzyżówki i kupić sobie książeczkę z takimi zadaniami lub można grać online np. korzystając ze stron https://pl.sudoku-online.net/, https://onlinesudoku.pl/ i innych.

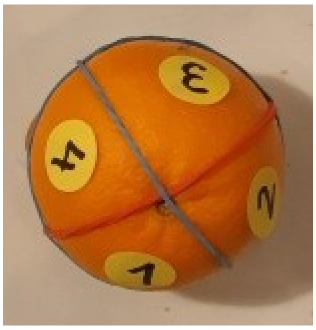
Ale w Sudoku można grać nie tylko na płaszczyźnie. Proponujemy Sudoku na kostce sześciennej:

i coś w rodzaju Sudoku na sferze, tylko z wykonywaniem obliczeń:

Przygotuj sferę do gry; możesz wykorzystać pomarańczę. Podziel jej powierzchnię na osiem przystających części, korzystając z gumek recepturek, które ułożysz jako trzy okręgi wielkie (jak równiki na globusie) wzajemnie do siebie prostopadłe:



Weź pod uwagę powierzchnię jednej półkuli i oznacz każdy z jej czterech regionów naklejając w nich samoprzylepne karteczki z liczbami 1., 2., 3. i 4., jak na zdjęciu poniżej:



W pozostałych trzech regionach wpisz takie liczby, aby sumy czterech liczb po obu stronach każdego okręgu wielkiego (na każdej półsferze) były takie same:

Oczywiście, możesz zacząć od wpisania na jednej półsferze liczb innych niż 1, 2, 3, 4. Mogą to być liczby kilkucyfrowe. Możesz na początku wpisać liczby tylko w trzech regionach, lub np. w pięciu regionach. Możesz ustalić, że liczby mogą się powtarzać lub nie mogą. Sam tworzysz zasady gry, tylko pamiętaj, że wraz ze zmianą zasad zmienia się poziom trudności gry.

Przyjemnej zabawy!

Zadania w formule sudoku mogą mieć treści nie tylko matematyczne. Przykładem może być muzyczne sudoku http://www.tomaszgrebski.pl/viewpage.php?page_id=834

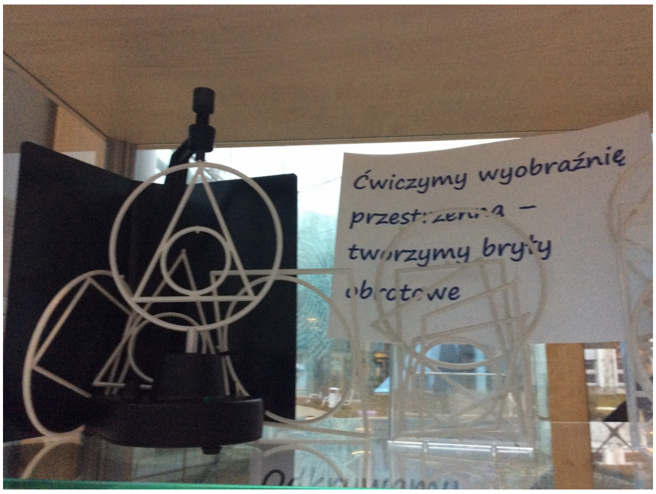
Aktywności uczniów podczas zajęć:

- rozegranie partii sudoku na trzech powierzchniach: na płaszczyźnie (na przygotowanych przez nauczyciela planszach), na kostce sześciennej (pomocy dydaktycznej z zasobów CKUM) i na sferze (samodzielnie przygotowanej na pomarańczy);
- zaprezentowanie swoich pomysłów na wykonane przez siebie „pomarańczowe” sudoku;
- burza mózgów na temat: Sudoku o jakiej tematyce chciałbym przygotować?

Propozycja 6. Lekcje z wykorzystaniem przyrządu do demonstracji brył obrotowych

Odbiorcy: uczniowie starszych klas szkół podstawowych i uczniowie szkół średnich;

Forma zajęć: wykład interaktywny połączony z prezentacją



Wprowadzenie:

Celem zajęć jest rozwijanie wyobraźni przestrzennej uczniów. Dzięki wielu ramkom z zestawu możemy symulować powstawanie brył wpisanych w inne bryły. Schemat zajęć jest następujący: na podstawie ramki uczniowie przewidują, jaka bryła powstanie; używamy przyrządu, aby zademonstrować bryłę; dyskutujemy nad własnościami otrzymanej bryły/brył (jeśli występują bryły wpisane), przypominamy wzory, sugerujemy zależności pomiędzy objętościami i polami powierzchni brył wpisanych i opisanych.

Aktywności uczniów:

- dyskutowanie;
- obserwacje;
- wnioskowania.

Propozycja 7. Odbicia symetryczne

Odbiorcy: uczniowie szkół podstawowych;

Forma zajęć: warsztaty;

Po prostu ćwiczymy wyobraźnię.

Propozycja 8. Ile jest geometrii na pomarańczy? Ile jest geometrii na globusie?

Odbiorcy: uczniowie kl. VI-VIII szkół podstawowych i uczniowie szkół średnich;

Forma zajęć: warsztaty;

Środki dydaktyczne:

- każdy uczestnik ma do swojej dyspozycji pomarańczę (może być mała i nie pierwszego gatunku pod względem smakowym), kilka krótkich wykałaczek, kilka gumek recepturek;
- jeden globus na grupę.

Aktywności uczniów:

- Dyskusja na temat: Płaszczyzna a sfera – różnice. Inne powierzchnie zakrzywione (przykłady z przyrody i architektury);
- Krótkie rozważanie na temat: Ile matematyki jest na globusie? Jakie figury geometryczne widzimy na powierzchni globusa? Dlaczego figury geometryczne na powierzchni globusa są ważne? Kto powinien zwracać na nie uwagę? Czy własności figur geometrycznych na płaszczyźnie i powierzchni kuli są takie same? Dlaczego to pytanie jest ważne?
- Praca badawcza uczestników:
  - Odkrywamy dwukąt na sferze i dyskutujemy, dlaczego taka figura nie istnieje na płaszczyźnie;
  - Czy linia prosta jest zawsze prosta? Poszukujemy sferycznej prostej;
  - Jak mierzymy odległość na sferze? Czy odległość między dwoma punktami na sferze można określić tylko jednym sposobem?
  - Czy na sferze istnieją proste prostopadłe? Czy można skonstruować proste sferyczne równoległe?
  - Czy na sferze można skonstruować trójkąt, który nie istnieje na płaszczyźnie?
  - Czemu jest równa suma kątów wewnętrznych w trójkącie sferycznym?
  - Czy na sferze można skonstruować kwadrat?

Propozycja 9. Trzeci system geometryczny, czyli geometria hiperboliczna na półsferze bez brzegu, na kole bez okręgu i na powierzchni siodłowej

Odbiorcy: uczniowie kl. VI-VIII szkół podstawowych i uczniowie szkół średnich (uczestnicy powinni przed tym zajęciami odbyć zajęcia opisane w Propozycji 8.);

Forma zajęć: warsztaty z elementami prezentacji;

Wprowadzenie:

Własności figur na płaszczyźnie opisuje geometria, której uczymy się w szkole, a którą opisał już w starożytności Euklides w swoim dziele „Elementy", natomiast na powierzchniach zakrzywionych geometrie nieeuklidesowe. Zakrzywienia powierzchni mogą być różne. Najpopularniejszą powierzchnią zakrzywioną jest sfera, czyli powierzchnia kuli, i własności figur geometrycznych na niej opisuje geometria sferyczna, której podstawy odkryli uczestnicy zajęć „Ile jest geometrii na pomarańczy? Ile jest geometrii na globusie?"

Są jednak też powierzchnie, jak na tym zdjęciu krajobrazu:

Figury geometryczne utworzone na takich powierzchniach podlegają prawom geometrii hiperbolicznej.

Są trzy modele geometrii hiperbolicznej: na półsferze bez brzegu, na kole bez brzegu i na powierzchni siodłowej, co ilustrują poniższe zdjęcia:

Część prezentacyjna zajęć będzie obejmowała omówienie własności figur geometrycznych w geometrii hiperbolicznej na półsferze bez brzegu i na powierzchni siodłowej, natomiast część warsztatowa będzie poświęcona tworzeniu konstrukcji figur geometrycznych na kole bez brzegu (dysku Poincare), aby otrzymać dzieła podobne do grafik Eschera.

Aktywności uczniów:

- Uczestniczenie w dyskusji nad prezentowanymi własnościami figur w geometrii hiperbolicznej na półsferze bez brzegu i na powierzchni siodłowej;
- Wykonanie własnego dzieła plastycznego na kole bez brzegu (czyli dysku Poincare) poprzez wykonanie konstrukcji przy pomocy komputera lub zwyczajnych przyrządów geometrycznych – oczywiście po instrukcji wykonywania konstrukcji prostych hiperbolicznych na dysku Poincare.

Propozycja 10. Różne powierzchnie

Odbiorcy: uczniowie szkół średnich;

Forma zajęć: wykład interaktywny;

Będą to zajęcia przybliżające różne geometrie na powierzchniach różnych rodzajów ze zwróceniem głównej uwagi na porównanie własności tych samych figur na różnych powierzchniach. Zwrócimy też uwagę na przekroje stożka płaszczyzną (prowadzące do krzywych stożkowych) oraz na mało znane powierzchnie, jak paraboloidy, hiperboloidy i inne. Dostrzeżemy też powierzchnie różnie zakrzywione w ludzkim organizmie.

Propozycja 11. Gdzie mieszka nieskończoność – eksperymenty ze światłem

Odbiorcy: uczniowie starszych klas szkół podstawowych i uczniowie szkół średnich;

Forma zajęć: prezentacja połączona z dyskusją;

Wprowadzenie:

Ziemia jest w przybliżeniu kulą, mapy są płaskie. Podstawowym problemem przy tworzeniu map jest takie rzutowanie obiektu 3D na powierzchnię 2D, aby uniknąć zniekształceń tak bardzo, jak jest to tylko możliwe.

Zajęcia będą stanowiły swojego rodzaju połączenie rzutowania, geometrii sferycznej, geometrii hiperbolicznej, geometrii rzutowej, kartografii. Będziemy wykonywać eksperymenty ze światłem, które pomogą nam rozwiązać następujące problemy:

1. Narysuj okręgi sferyczne na plastikowym modelu półsfery i połóż ją na białym papierze na stole. „Stoi” ona na punkcie biegunowym. Weź źródło światła i poruszaj nim pionowo w górę i w dół nad punktem biegunowym półsfery. Jakie kształty widzisz na papierze? Co się stanie, jeśli będziesz poruszać źródłem światła ruchem ciągłym z bardzo wysoka do pozycji tuż nad punktem biegunowym półsfery? Gdzie musisz umieścić źródło światła, aby rzutem okręgu sferycznego na płaszczyznę był okrąg? Czy rzutami przystających okręgów sferycznych będą przystające okręgi na płaszczyźnie?
2. Narysuj proste sferyczne na plastikowym modelu półsfery i połóż ją na białym papierze na stole. „Stoi” ona na punkcie biegunowym. Weź źródło światła i poruszaj nim pionowo w górę i w dół nad punktem biegunowym półsfery. Jak powinieneś poruszać źródłem światła, aby rzutami prostych sferycznych były proste na płaszczyźnie? Gdzie musisz umieścić źródło światła, aby rzutem prostej sferycznej na płaszczyznę była prosta? Która prosta sferyczna nie ma wtedy swego obrazu w rzutowaniu? Co się dzieje z punktami tej prostej? Co się dzieje ze sferycznymi prostymi, które przecinają prostą niemającą obrazu w tym rzutowaniu?

3. W modelu geometrii hiperbolicznej, jakim jest półsfera bez brzegu, prostymi są „pionowe” półokręgi. Jakie inne modele geometrii hiperbolicznej mogą być utworzone przez rzutowania tych linii w zależności od odległości źródła światła od powierzchni, na której leży półsfera?
4. Jak powstaje odwzorowanie Merkatora?

Aktywności uczniów:

- Wykonywanie eksperymentów (jeden uczeń wykonuje przed całą grupą);
- Stawianie hipotez, dyskutowanie, wnioskowanie.

Propozycja 12. Dowód nie wprost bez tajemnic

Odbiorcy: uczniowie szkół średnich

Forma zajęć: wykład interaktywny z elementami warsztatów;

Wprowadzenie:

Uczniowie mają problemy z dowodzeniem twierdzeń – to sprawa ogólnie znana. Dużo problemów sprawia zwłaszcza dowodzenie metodą nie wprost, a w niektórych sytuacjach stosowania tego typu dowodu nie da się uniknąć. Wykład jest poświęcony omówieniu idei dowodu nie wprost na bazie logiki matematycznej oraz zaprezentowanie przykładów dowodzenia twierdzeń metodą nie wprost.

Aktywności uczniów:

- uczestniczenie w dyskusji nad poszczególnymi elementami wykładu;
- analizowanie przedstawionych dowodów;
- przeprowadzenie przynajmniej jednego dowodu metodą nie wprost.

Propozycja 13. Znajdujemy błędy w rozumowaniach

Odbiorcy: uczniowie szkół średnich

Forma zajęć: wykład interaktywny z elementami warsztatów;

Wprowadzenie:

Dobrą metodą uczenia się dowodzenia twierdzeń jest analizowanie gotowych dowodów i znajdowanie w nich błędów (jeśli zostały popełnione). Wyszukiwanie błędów w dowodach jest tym bardziej fascynujące, jeśli „udowodniony” został fakt zdecydowanie nieprawdziwy. Przy okazji zapamiętujemy, jakich błędów w rozumowaniach matematycznych (a czasami też w prostych obliczeniach) nie wolno popełniać, kiedy „nie można iść na skróty” itp. Podczas wykładu będziemy analizować szereg prostych przykładów dowodów dotyczących takich „odkryć matematycznych” jak „2+2=5”, „1 złoty = 1 grosz”, „0/0=2” i innych, przypominając sobie prawa działań na liczbach, wzory skróconego mnożenia, angażując w przeprowadzanie dowodów arytmetykę i algebrę.

Aktywności uczniów:

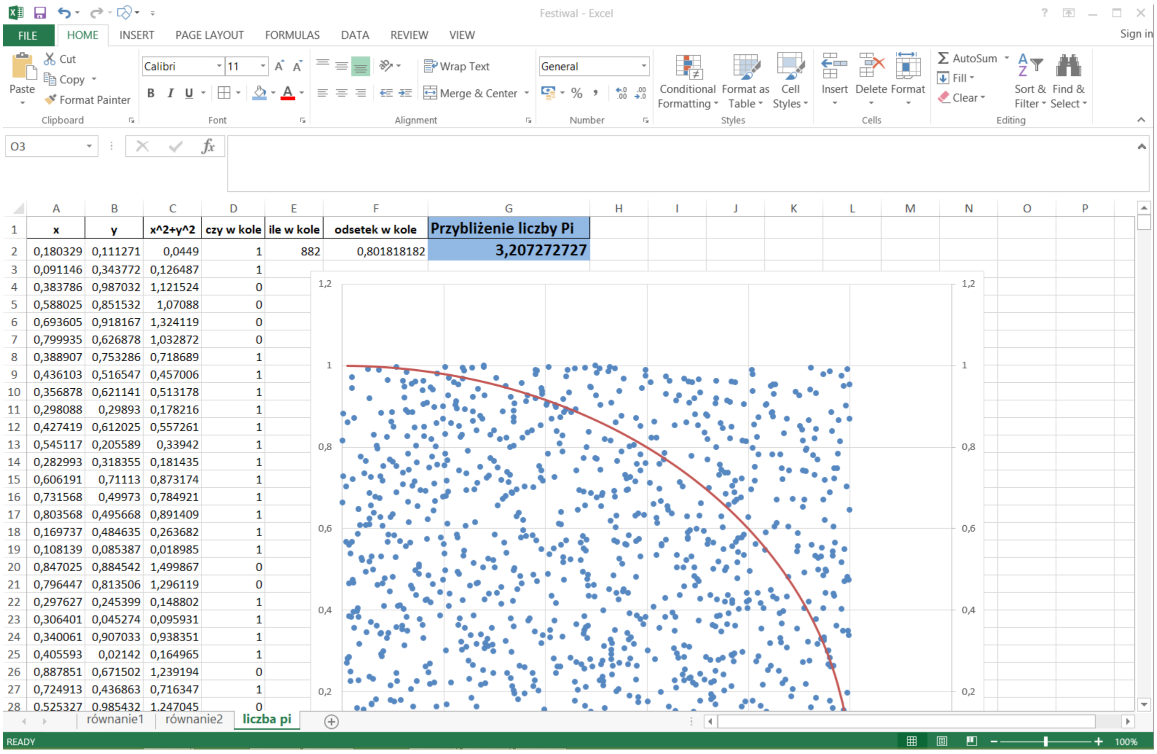
- uczestniczenie w dyskusji nad poszczególnymi elementami wykładu;
- wspólne analizowanie przedstawionych dowodów i wyszukiwanie w nich błędów;
- samodzielne znajdowanie błędów w dowodach.

Propozycja 14. Wykorzystanie narzędzi programu Excel na lekcjach matematyki

Odbiorcy: Uczniowie szkół średnich

Forma zajęć: Warsztaty w pracowni komputerowej

- Przy użyciu narzędzi programu Excel pokażemy uczniom, jak można wyznaczać przybliżone rozwiązania równań zarówno wielomianowych jak i transcendentnych.
- Wykorzystując losowość położenia punktów w kwadracie wyznaczymy przybliżenie wartości liczby pi (metoda Monte Carlo)



Propozycja 15. Opowieść o początkach algebry

Odbiorcy: uczniowie szkół średnich

Forma zajęć: wykład interaktywny;

Podczas wykładu odbędziemy podróż w czasie i przestrzeni. Na początek przeniesiemy się do IX-wiecznego Bagdadu i zobaczymy jak Muhammad ibn Musa al-Chwarizmi w prosty sposób (stosując jedynie wzór na pole prostokąta) rozwiązał równanie kwadratowe. Następnie powrócimy do Europy, dokładniej do XVI-wiecznych Włoch, i zobaczymy jak Nicolo Fontana wykorzystując wzór na objętość prostopadłościanu poradził sobie z równaniami sześciennymi. Analizując pomysł Fontany, Girolamo Cardano doszedł do przekonania, że istnieją pierwiastki kwadratowe z liczb ujemnych.

Propozycja 16. Lekcje oparte o tematykę realizowaną w ramach naszych matematycznych Klubów Młodego Odkrywcy – cykl „Podążamy śladami wielkich matematyków"

- **Podążamy ścieżkami jednego z największych matematyków wszech czasów Leonarda Eulera** (odbiorcy: uczniowie starszych klas szkół podstawowych i uczniowie szkół średnich): wzór Eulera dla wielościanów; mosty królewieckie i wprowadzenie do teorii grafów, czyli jak z krajobrazu powstaje matematyka;
- **I Ty możesz odkrywać matematykę jak Fibonacci:** odkrywanie zasady, według której można obliczyć kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego (na bazie zadania o królikach); odkrywanie złotej proporcji;
- **Badamy trójkąt Pascala;**
- **Podążamy za Hugo Steinhausem:** zależność pomiędzy objętością walca i wpisanej w niego kuli; sprawiedliwe podziały.

Propozycje z tego cyklu będą się pojawiały sukcesywnie co miesiąc, ponieważ spotkania Klubów odbywają się raz w miesiącu. W następnej kolejności będziemy podążać śladami kobiet-matematyczek. Zajęcia z tego cyklu będą się odbywały wyłącznie w formie warsztatów.

Oczywiście, w dalszym ciągu jesteśmy otwarci na propozycje tematów zajęć zgłaszane przez nauczycieli.

Opracowanie

dr Anna Rybak

Centrum Kreatywnego Uczenia się Matematyki

Wydział Matematyki, Uniwersytet w Białymstoku