

## Scenariusz zajęć KMO – wrzesień 2022

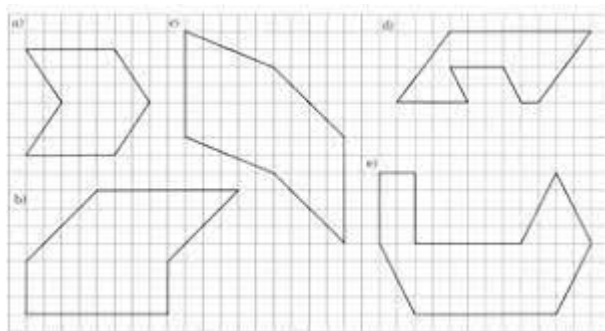
Klub Młodego Odkrywcę „My, tropiciele matematyki”, Białystok

Hasło przewodnie: **Upraszczamy sobie życie matematyczne podążając śladami wybitnych matematyków**

Temat: **Czy obliczając pole wielokąta musimy znać wiele wzorów?**

### Wprowadzenie

Obecnie tylko w niektórych szkołach uczniowie używają zeszytów do geometrii tzw. czystych, czyli bez kratek i linijek. Przeważnie używają zeszytów w kratkę i cieszą się z tego, gdyż bardzo lubią rysować figury geometryczne „po kratkach”, np. tak:



### Problem:

Czy to, że rysujemy wielokąt na papierze w kratkę i umieszczamy jego wierzchołki na przecięciu linii tworzących kratkę daje nam jakieś korzyści dotyczące obliczeń? Na przykład: Czy można obliczyć pole takiego wielokąta nie pamiętając wzorów, których uczyliśmy się na lekcjach?

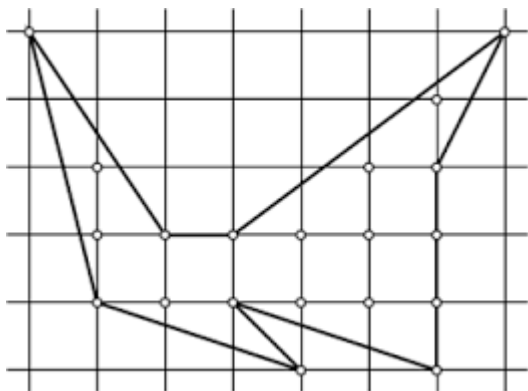
Spróbujmy to zbadać.

### Rekwizyty:

- geoplany, gumki recepturki,
- papier w kratkę,
- ołówki, gumki do ścierania.

### Etap1. Rozmowa o kratkach i punktach kratowych

Poniżej widzicie kratkę i punkty kratowe na kartce i na geoplanie. Czym one się charakteryzują?



### Etap 2. Doświadczenie

Proszę utworzyć na swoich geoplanach dowolny wielokąt i opowiedzieć o nim: co to jest, z czego się składa, jaki ma obwód i pole.

### Etap 3. Dyskusja: Jak obliczyć obwód i pole wielokąta? Od czego zależy poziom trudności w tym zadaniu?

(Spodziewamy się, że uczestnicy powiedzą, że od budowy wielokąta i położenia boków.)

Pytania pomocnicze w dyskusji:

Jaka jest najprostsza figura, którą można utworzyć na geoplanie o polu, które obliczymy natychmiast? (kwadrat jednostkowy)

Czy można uzyskać z tej figury trójkąt, którego pole obliczymy natychmiast? (trójkąt prostokątny – połowa kwadratu)

Jak obliczyć pole bardziej złożonej figury? (podzielić na mniejsze)

Itd w zależności od rozwoju dyskusji.

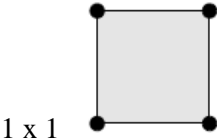
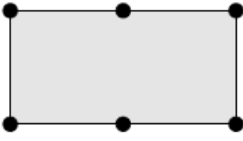
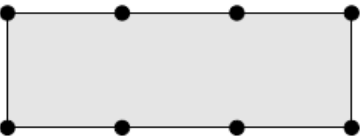
### Etap 4. Obliczenia

Proszę obliczyć pole utworzonego przez siebie wielokąta. Jeśli jest bardzo złożony, można zbudować nowy, prostszy.

### Etap 5. Eksperyment i odkrywanie

A teraz spróbujmy wykorzystać fakt, że wierzchołki naszych wielokątów leżą w punktach kratowych. Proszę policzyć, ile punktów kratowych leży na brzegu Waszych wielokątów, a ile wewnątrz. Czy te liczby mają jakiś związek z obliczonym polem wielokąta?

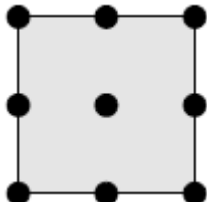
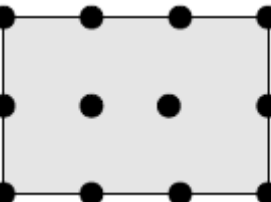
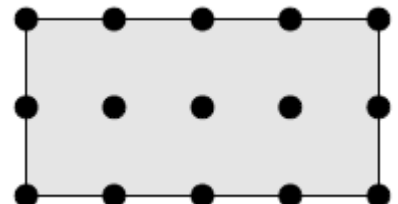
Na podstawie jednego przykładu trudno to stwierdzić, wykonajmy więc serię doświadczeń, rozpoczynając od najprostszych wielokątów, i wypełnijmy tabelkę wzorując się kilkoma pierwszymi przykładami:

Wielokąt kratowy o rozmiarze	Pole P	Ile punktów kratowych na brzegu: B	Ile punktów kratowych wewnątrz: I
 1 x 1	1	B=4	I=0
 1 x 2	2	B=6	I=0
 1 x 3	3	B=8	I=0
1 x n	n	$B=2*(n+1)=2*n+2$	I=0

**W przypadku gdy nie ma punktów kratowych wewnątrz otrzymujemy zależność**

$$B = 2 * P + 2 \text{ więc } P = \frac{1}{2} B - 1$$

Rozważamy przykłady z punktami kratowymi wewnątrz i porównujemy otrzymane pole z polem obliczonym ze wzoru:



	P	B	I	Wcześniej uzyskany wzór $\frac{1}{2} B - 1$	Różnica $P - (\frac{1}{2} B - 1)$
2 x 1	P=2	B=6	I=0	2	0
 2 x 2	P=4	B=8	I=1	3	1
 2x3	P=6	B=10	I=2	4	2
 2 x 4	P=8	B=12	I=3	5	3

**Etap 6. Dyskusja podsumowująca tę część zajęć, sformułowanie wzoru:**

$$P = \frac{1}{2} B - 1 + I$$

**Etap 7. Czy ten wzór jest dobry dla wszystkich wielokątów?**

Sprawdzamy przypadek wielokątów „z dziurami”.

	P=2 B=7 I=0 Pole ze wzoru Pick $P = \frac{1}{2} * 7 - 1 + 0 = 2,5$ Wzór nie działa
	A=8 B=16 I=0 Pole ze wzoru Pick $P = \frac{1}{2} * 16 - 1 - 0 = 7$ Wzór nie działa

**Twierdzenie Picka**

Pole wielokąta prostego (złożonego z jednego kawałka i bez dziur), którego wierzchołki są punktami kratowymi na płaszczyźnie zadane jest wzorem

$$P = \frac{1}{2} B + I - 1$$

gdzie P – to pole wielokąta, B- ilość punktów kratowych leżących na brzegu wielokąta, I – ilość punktów kratowych leżących wewnątrz.

Powyższy wzór jest prawdziwy jedynie dla wielokątów prostych (złożonych z jednego kawałka i bez dziur).

## Podsumowanie

Ten wzór odkrył Georg Alexander Pick - matematyk austriacki. Urodził się on 10 sierpnia 1859 w Wiedniu, a zmarł 26 lipca 1942 w obozie koncentracyjnym w Terezynie.

W ciągu swojej kariery Pick napisał aż 67 prac o bardzo rozległej tematyce. Był przyjacielem Alberta Einsteina. Odegrał dużą rolę w początkowym okresie kariery Einsteina. Łączyła ich nie tylko nauka, ale też zamiłowanie do muzyki. Pick grający w kwartecie z trzema innymi profesorami zapoznał go z naukową i muzyczną społecznością w Pradze.

## Bibliografia

1. [https://pl.wikipedia.org/wiki/Wz%C3%B3r\\_Picka](https://pl.wikipedia.org/wiki/Wz%C3%B3r_Picka) (data dostępu 19.09.2022)
2. Ian Stewart „*Another Fine Math You've Got Me Into...*” Rozdział 5 Ile mamy kóz w sadzie?
3. Miniatury matematyczne dla szkół podstawowych nr 18 „Matematyka dla dużych i małych”, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń
4. <http://www.geometer.org/mathcircles/pick.pdf> (data dostępu 19.09.2022)
5. <https://www.math.uci.edu/~mathcircle/materials/2014.05.04MSMC.pdf> (data dostępu 19.09.2022)
6. Scenariusz procedur: EKSPERYMENTY NAUKOWE DLA PRZEDMIOTU MATEMATYKA, opracowanie: Jerzy Kielech Szkoła podstawowa, klasa 4, temat 10: POLE RABATKI KWIATOWEJ – WZÓR PICKA  
<https://static.zpe.gov.pl/portal/f/res/RTaxVEXDyWUfA/1/jTu6lQsEittucl7WMnwJzQLZt0pBq8Dr/procedury.pdf> (data dostępu 19.09.2022)
7. Eva Elduque „*Pick's Theorem*” 9/28/2015 <https://wiki.math.wisc.edu/images/Pick.pdf> (data dostępu 19.09.2022)

Justyna Makowska, Anna Rybak

Centrum Kreatywnego Uczenia się Matematyki Uniwersytet w Białymstoku

Wydział Matematyki, ul. Ciołkowskiego 1M, 15-245 Białystok

<https://math.uwb.edu.pl/pl/ckum/>

[ckum@math.uwb.edu.pl](mailto:ckum@math.uwb.edu.pl)



My,

## tropiciele matematyki

Materiał dla uczestników zajęć KMO 28.09.2022

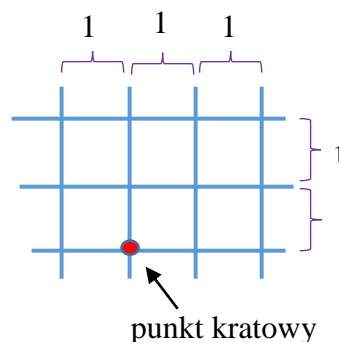
Hasło przewodnie: **Upraszczamy sobie życie matematyczne podążając śladami wybitnych matematyków**

Temat: **Czy obliczając pole wielokąta musimy znać wiele wzorów?**

### Krata i punkty kratowe

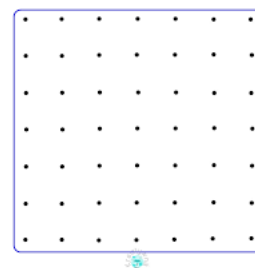
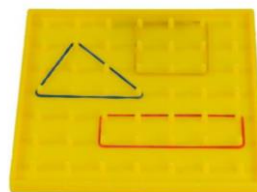
Na płaszczyźnie (kartce) poprowadzimy linie pionowe (równoległe) tak, że odległość między parą sąsiednich linii jest równa 1 oraz linie poziome (prostopadłe do tych pionowych) też spełniające taki sam warunek.

Takie linie tworzą KRATĘ (siatkę). Punkty przecięcia linii nazywamy PUNKTEM KRATOWYM.



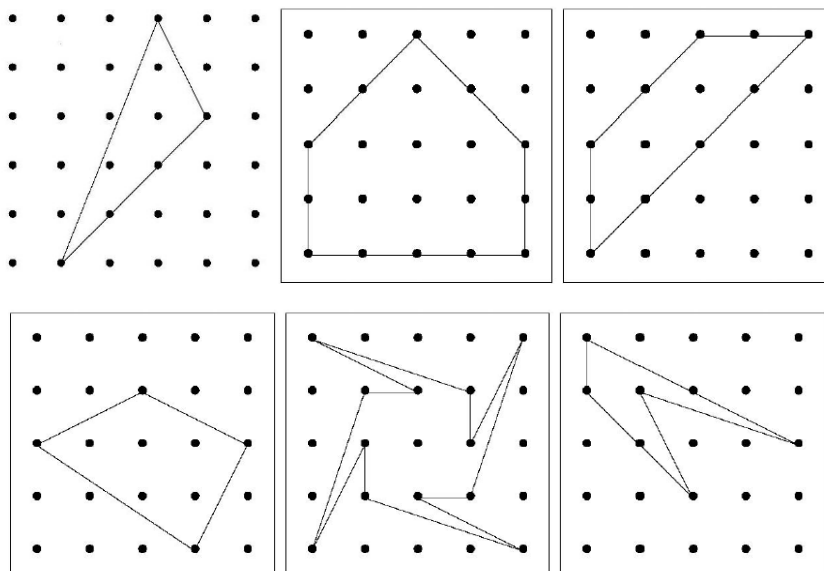
Czy coś to Wam przypomina? Może zeszyty w kratkę używane na matematyce 😊

Kratę możemy też przedstawić przy użyciu narzędzia GeoBoard (GeoPlany) na którym linie siatki (pionowe i poziome) są niewidoczne, a zaznaczone są tylko punkty kratowe.



### Wielokąty kratowe

Wielokąty kratowe to wielokąty których wierzchołki to punkty kratowe, np.



## Twierdzenie Picka

Pole wielokąta kratowego prostego (złożonego z jednego kawałka i bez dziur), którego wierzchołki są punktami kratowymi na płaszczyźnie zadane jest wzorem

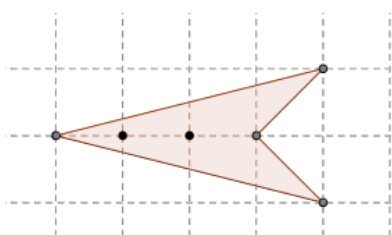
$$\text{Pole wielokąta} = \frac{1}{2} B + I - 1$$

gdzie

B – oznacza ilość punktów kratowych leżących na brzegu wielokąta

I – oznacza ilość punktów kratowych leżących wewnątrz wielokąta.

Czyli wykorzystując wzór Picka szybko policzymy pola wielokątów kratowych



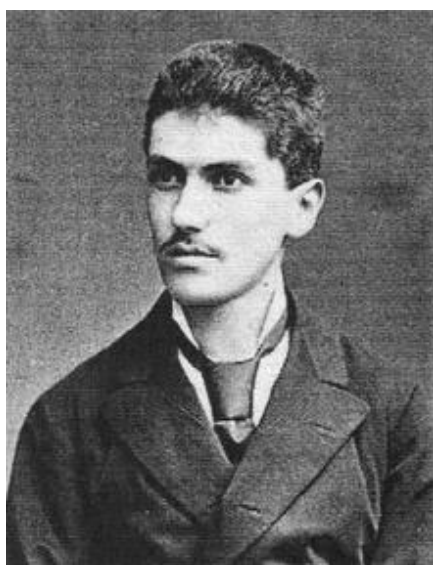
I = 2, tyle punktów kratowych leży wewnątrz wielokąta  
B = 4, tyle punktów kratowych leży na brzegu wielokąta

$$\text{Pole wielokąta} = \frac{1}{2} B + I - 1 = 2 + 2 - 1 = 3$$

Spróbuj sam:



## Georg Alexander Pick

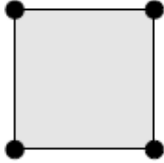


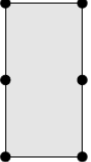
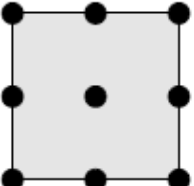
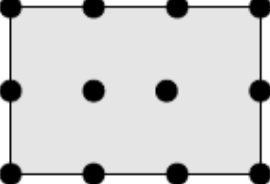
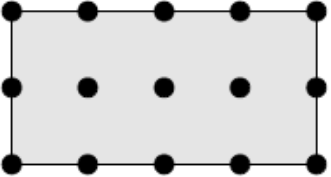


Ten wzór odkrył i po raz pierwszy opisał w 1899 r. Georg Alexander Pick - matematyk austriacki. Urodził się on 10 sierpnia 1859 w Wiedniu, a zmarł 26 lipca 1942 w obozie koncentracyjnym w Terezynie.

W ciągu swojej kariery Pick napisał aż 67 prac o bardzo rozległej tematyce. Był przyjacielem Alberta Einsteina. Odegrał dużą rolę w początkowym okresie kariery Einsteina. Łączyła ich nie tylko nauka, ale też zamiłowanie do muzyki. Pick grający w kwartecie z trzema innymi profesorami zapoznał go z naukową i muzyczną społecznością w Pradze.

Centrum Kreatywnego Uczenia się Matematyki, Wydział Matematyki UwB  
ul. Ciołkowskiego 1 M, email: [ckum@math.uwb.edu.pl](mailto:ckum@math.uwb.edu.pl)

## ODKRYWANIE WZORU PICKA – materiał pomocniczy

Wielokąt kratowy o rozmiarze	Pole wielokąta	Ile punktów kratowych na zewnątrz: B	Ile punktów kratowych wewnątrz: I	obwód
 <p>1 x 1</p>				
 <p>1 x 2</p>				
 <p>1 x 3</p>				
 <p>2 x 1</p>				
 <p>2 x 2</p>				
 <p>2 x 3</p>				
 <p>2 x 4</p>				